TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 05

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$

Definición 1. *Si $R = I_1 \times I_2$ es un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, denotaremos por $a(R)$ al área de R.*

Lema 1. *Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^2$ y una colección finita de rectángulos abiertos $\left\{R^{(j)} = \left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right) \times \left(a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right) : \ m \in \mathbb{N} \text{ y } j \in \{1, 2, \ldots, m\}\right\}$ tales que $R \subset \bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)}$, entonces:*

$a(R) \leq \sum_{j=1}^{m} a\left(R^{(j)}\right)$.

Demostración

Si alguno de los rectángulos $R^{(j)}$ no está acotado, el resultado es inmediato, así que asumiremos que todos los rectángulo $R^{(j)}$ están acotados. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, denotemos por $\overline{R}^{(j)}$ a la cerradura de $R^{(j)}$, es decir al rectángulo $\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] \times \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right]$.

Para cada $i \in \{1, 2\}$, los puntos $a_i, b_i, a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(m)}, b_i^{(m)}$ constituyen una partición de un intervalo $[c_i, d_i]$. Para $i = 1$ (resp. $i = 2$), denotemos por $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}$ (resp. $x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}$) los elementos de esa partición, ordenados del menor al mayor y, para $k_1 \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ y $k_2 \in \{1, 2, \ldots, n_2\}$, definamos $R_{k_1,k_2} = \left(x_{k_1-1}^{(1)}, x_{k_1}^{(1)}\right) \times \left(x_{k_2-1}^{(2)}, x_{k_2}^{(2)}\right)$ y denotemos por $\overline{R}_{k_1,k_2}$ a la cerradura de R_{k_1,k_2}, es decir al rectángulo $\left[x_{k_1-1}^{(1)}, x_{k_1}^{(1)}\right] \times \left[x_{k_2-1}^{(2)}, x_{k_2}^{(2)}\right]$.

Por la construcción de los rectángulos R_{k_1,k_2}, el rectángulo R, así como cada uno de los rectángulos $\overline{R}^{(j)}$, con $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, es la unión de algunos de los rectángulos $\overline{R}_{k_1,k_2}$. Además, cualquier par de rectángulos R_{k_1,k_2} son ajenos.

Sean $R_1, R_2, \ldots, R_t$ los rectángulos de la familia

$\left\{\overline{R}_{k_1,k_2} : k_1 \in \{1, 2, \ldots, n_1\} \text{ y } k_2 \in \{1, 2, \ldots, n_2\}\right\}$,

cuya unión es igual a R.

Como $R \subset \bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)}$, cada rectángulo R_i $(i \in \{1, 2, \ldots, t\})$ está contenido en algún rectángulo $\overline{R}^{(j)}$ $(j \in \{1, 2, \ldots, m\})$. Además:

$a(R) = \sum_{i=1}^{t} a(R_i)$.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sea D_j el conjunto de índices de los rectángulos de la familia $\{R_1, R_2, \ldots, R_t\}$ que están contenidos en $\overline{R}^{(j)}$. Obviamente se tiene:

$$a\left(R^{(j)}\right) = a\left(\overline{R}^{(j)}\right) \geq \sum_{\{i \in D_j\}} a(R_i).$$

Y como cada rectángulo R_i $(i \in \{1, 2, \ldots, t\})$ está contenido en algún rectángulo $\overline{R}^{(j)}$ $(j \in \{1, 2, \ldots, m\})$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{m} a\left(R^{(j)}\right) \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{\{i \in D_j\}} a(R_i) \geq \sum_{i=1}^{t} a(R_i) = a(R).$$

■

Los siguientes dos resultados son la base para demostrar que la medida exterior, que se define más adelante, es σ-subaditiva; lo cual, a su vez, es lo que permite definir una medida a partir de una medida exterior.

Proposición 1. *Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^2$ y una sucesión $R^{(j)} = \left(a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right) \times \left(a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right)$ (con $j \in \mathbb{N}$) de rectángulos en $\mathbb{R}^2$ tales que $R \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R^{(j)}$, entonces:*

$a(R) \leq \sum_{j=1}^{\infty} a\left(R^{(j)}\right)$.

Demostración

Por el teorema de Heine-Borel, existe una colección finita, $R^{(j_1)}, R^{(j_2)}, \ldots, R^{(j_m)}$, tal que:

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{m} R^{(j_1)}.$$

Así que, por el lema anterior:

$$a(R) \leq \sum_{i=1}^{m} a\left(R^{(j_i)}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} a\left(R^{(j)}\right).$$

■

Proposición 2. *Sea R un rectángulo finito de cualquier tipo y $R_1, R_2, \ldots$ una familia finita o infinita numerable de rectángulos abiertos tales que $R \subset \bigcup_j R_j$, entonces:*

$a(R) \leq \sum_j a(R_j)$.

Demostración

Sea $R = I \times J$, a y b los extremos del intervalo I, c y d los extremos del intervalo J. Definamos:

$L_1 = \{a\} \times [c,d]$

$L_2 = \{b\} \times [c,d]$

$L_3 = [a,b] \times \{c\}$

$L_4 = [a,b] \times \{d\}$

Entonces L_1, L_2, L_3, L_4 son los lados del rectángulo R.

Dada $\varepsilon > 0$, para $k \in \{1,2,3,4\}$, sea $R^{(k)}$ un rectángulo abierto que contenga a L_k y de área igual a $\frac{\varepsilon}{4}$. Entonces la unión de los rectángulos $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}, R_1, R_2, \ldots$ contiene al rectángulo $\overline{R} = [a,b] \times [c,d]$. Por el teorema de Heine-Borel, existe entonces una colección finita de esos rectángulos cuya unión contiene a $\overline{R}$, así que:

$$a(R) = a(\overline{R}) \leq \sum_j a(R_j) + \varepsilon.$$

Como esta relación es válida para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede concluir que $a(R) \leq \sum_j a(R_j)$.

■

Con base en lo anterior, la definición de los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^2$ y la demostración de sus propiedades, puede hacerse siguiendo paso a paso el razonamiento de Lebesgue para el caso de los conjuntos medibles en $\mathbb{R}$.

Definición 2. *Diremos que una colección finita o infinita numerable de rectángulos abiertos finitos $R_1, R_2, \ldots$ es una cubierta del conjunto A si $A \subset \bigcup_n R_n$.*

Definición 3. *Se define la medida exterior, $m_e(A)$, de un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, mediante la relación:*

$$m_e(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_j a(R_j) : R_1, R_2, \ldots \text{ es cubierta de } A \right\}$$

Proposición 3. *Si A y B son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que $A \subset B$ entonces:*

$m_e(A) \leq m_e(B)$

Proposición 4. *La medida exterior de un rectángulo es igual a su área.*

Demostración

Consideremos primero un rectángulo finito R. Por la proposición 2 se tiene $a(R) \leq m_e(R)$.

Dada $\varepsilon > 0$ sea R_0 un rectángulo abierto tal que $R_0 \supset R$ y $a(R_0) < a(R) + \varepsilon$. Como $R_0 \supset R$, R_0 es cubierta de R, así que se tiene:

$$m_e(R) \leq a(R_0) < a(R) + \varepsilon$$

Es decir, $m_e(R) < a(R) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $m_e(R) \leq a(R)$.

Si el rectángulo R es infinito, dado cualquier $\alpha > 0$ existe un rectángulo finito R_0 contenido en R y de área α. Por lo tanto, $m_e(R) \geq m_e(R_0) = a(R_0) = \alpha$. Así que $m_e(R) = \infty$.

■

Ahora viene la propiedad que caracteriza a una medida exterior (la σ-subaditividad).

Proposición 5. *Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, entonces:*

$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e(A_n)$

Demostración

Si $m_e(A_n) = \infty$ para alguna n el resultado es trivial.

Supongamos entonces que $m_e(A_n) < \infty$ para toda n. Dada $\varepsilon > 0$, para cada conjunto A_n sea $R_{n,1}, R_{n,2}, \ldots$ una cubierta de A_n tal que $\sum_m a(R_{n,m}) < m_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. La familia de rectángulos $R_{n,m}$ forman una cubierta de $\bigcup_n A_n$, así que:

$$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \sum_m a(R_{n,m}) \leq \sum_n \left[m_e(A_n) + \tfrac{\varepsilon}{2^n}\right] \leq \sum_n m_e(A_n) + \varepsilon$$

Es decir, $m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e(A_n) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto:

$$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e(A_n)$$

■

Definición 4. *Diremos que un subconjunto E de $\mathbb{R}^2$ es Lebesgue medible si:*

$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$

para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Además, en ese caso, se define la medida de E, $m(E)$, como la medida exterior de E.

Obsérvese que, por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$m_e(A) \leq m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A, de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad; es decir:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

Ahora se trata de demostrar que la familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y que la función que asigna a cada conjunto medible su medida es σ-aditiva. Comenzamos demostrando primero que forma un álgebra y que la función medida es finitamente aditiva.

Proposición 6. *La familia de conjuntos Lebesgue medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración

Que $\mathbb{R}^2$ es medible, así como que el complemento de un conjunto medible es medible, son resultados obvios.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles y A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Se tiene entonces:

$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)$

Así que:

$m_e\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + m_e\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right]$

$= m_e\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right] + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$\leq m_e(A \cap E_1) + m_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$= m_e(A \cap E_1) + m_e\left[(A \cap E_1^c) \cap E_2\right] + m_e\left[(A \cap E_1^c) \cap E_2^c\right]$

$= m_e(A \cap E_1) + m_e(A \cap E_1^c) = m_e(A)$

Así que, $E_1 \cup E_2$ es medible.

■

Proposición 7. *Sea $E_1, E_2, \ldots, E_n$ cualquier colección finita de conjuntos Lebesgue medibles, ajenos por parejas, entonces:*

$m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j)$

para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^2$.

Demostración

Para $n = 1$ la igualdad es obvia.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $n = k$ y sea $E_1, E_2, \ldots, E_{k+1}$ una colección de $k+1$ conjuntos medibles, ajenos por parejas, entonces, como E_{k+1} es Lebesgue medible, se tiene:

$m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j)\right] = m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}\right] + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}^c\right]$

$= m_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)\right]$

$= m_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} m_e(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{k+1} m_e(A \cap E_j)$

Así que, por el principio de inducción matemática:

$$m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right] = \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j)$$

para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ y cualquier familia finita de conjuntos medibles $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

■

Corolario 1. *La función que asigna a cada conjunto Lebesgue medible E su medida, $m(E)$, es una función finitamente aditiva.*

Proposición 8. *La familia de conjuntos Lebesgue medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos Lebesgue medibles, ajenos por parejas. Como la familia de conjuntos Lebesgue medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ es Lebesgue medible, así que, utilizando la proposición 7 y la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene, para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^2$:

$m_e(A) = m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right] + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right]$

$= \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j) + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right]$

$\geq \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j) + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right]$

Tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$, se obtiene:

$m_e(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_e(A \cap E_j) + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right]$

$\geq m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)\right] + m_e\left[A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right]$

Por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es Lebesgue medible.

■

Proposición 9. *La función que asigna a cada conjunto Lebesgue medible E su medida, $m(E)$, es una función σ-aditiva.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos Lebesgue medibles, ajenos por parejas. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$. Por otra parte, por la aditividad finita de la función que asigna a cada conjunto Lebesgue medible su medida, se tiene, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq m(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j)$$

Así que, tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$, setiene:

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

■

Proposición 10. *Todo conjunto de medida exterior cero es Lebesgue medible.*

Demostración

Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida exterior cero. Entonces, para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$m_e(A \cap E) = 0$$

Además, como $A \cap E^c \subset A$, se tiene:

$$m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

Por lo tanto:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

Así que E es medible.

$\blacksquare$

Proposición 11. *Todo conjunto boreliano es Lebesgue medible.*

Demostración

Como la familia de conjuntos Lebesgue medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, es suficiente con probar que los rectángulos de la forma $[a, \infty) \times [c, \infty)$ son Lebesgue medibles, ya que éstos generan la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^2$.

Sea E un rectángulo de la forma $[a, \infty) \times [c, \infty)$, A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $R_1, R_2, \ldots$ una cubierta de A.

Sea $R_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$, se tiene entonces:

$E^c = (-\infty, a) \times [c, \infty) \cup (-\infty, \infty) \times (-\infty, c)$

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$R_n \cap E$ es un rectángulo o el conjunto vacío.

$R_n \cap E^c$ es un rectángulo o el conjunto vacío, a menos que se tenga $a_n < a < b_n$ y $c_n < c < d_n$, en cuyo caso $R_n \cap E^c$ es la unión de dos rectángulos, a saber:

$R_n \cap E^c = (a_n, a) \times [c, d_n) \cup (a_n, b_n) \times (c_n, c)$

Si éste es el caso, definimos $R_n^{(1)}$ y $R_n^{(2)}$ de la siguiente manera:

$R_n^{(1)} = (a_n, b_n) \times (c_n, c)$

$R_n^{(2)} = [(a_n, b_n) \times [c, d_n)] \cup \left[(a_n, b_n) \times \left(c - \frac{\varepsilon}{2^n(b_n - a_n)}, c\right)\right]$

Donde ε es un número real positivo cualquiera, pero el mismo para todos los conjuntos R_n tales que $R_n \cap E^c$ es la unión de dos rectángulos.

Así que tenemos:

$R_n^{(1)} \cup R_n^{(2)} = R_n \cup \left[(a_n, b_n) \times \left(c - \frac{\varepsilon}{2^n(b_n - a_n)}, c\right)\right]$

$a\left(R_n^{(1)}\right) + a\left(R_n^{(2)}\right) = a\left(R_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

En la cubierta $R_1, R_2, \ldots$, los rectángulos R_n con esa propiedad, los reemplazamos por $R_n^{(1)}$ y $R_n^{(2)}$. Después de hacer esto, reenumeramos los elementos de la cubierta para obtener una nueva cubierta de A, $S_1, S_2, \ldots$ con la propiedad de que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $S_n \cap E^c$ es un rectángulo o el conjunto vacío y:

$\sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} a(S_n) \leq \sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} a(R_n) + \sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} a(R_n) + \varepsilon$

Entonces, como para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $S_n \cap E$ y $S_n \cap E^c$ son rectángulos o el conjunto vacío, se tiene:

$m_e(A \cap E) \leq m_e\left[(\bigcup_n S_n) \cap E\right] = m_e\left[\bigcup_n (S_n \cap E)\right]$

$\leq \sum_n m_e(S_n \cap E) = \sum_{\{n\in\mathbb{N}: S_n\cap E\neq\emptyset\}} a(S_n \cap E)$

$m_e(A \cap E^c) \leq m_e\left[(\bigcup_n S_n) \cap E^c\right] = m_e\left[\bigcup_n (S_n \cap E^c)\right]$

$\leq \sum_n m_e(S_n \cap E^c) = \sum_{\{n\in\mathbb{N}: S_n\cap E^c\neq\emptyset\}} a(S_n \cap E^c)$

Así que:

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq \sum_{\{n\in\mathbb{N}: S_n\cap E\neq\emptyset\}} a(S_n \cap E) + \sum_{\{n\in\mathbb{N}: S_n\cap E^c\neq\emptyset\}} a(S_n \cap E^c)$

$\leq \sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} a(S_n) \leq \sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} a(R_n) + \varepsilon$

Como esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos:

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq \sum_{\{n\in\mathbb{N}\}} a(R_n)$

Finalmente, como lo anterior es válido para cualquier cubierta de A, se puede concluir que:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

■

Proposición 12. *Dado cualquier conjunto Lebesgue medible E existe un boreliano B y un conjunto C de medida exterior cero tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.*

Demostración

Consideremos primero el caso de un conjunto Lebesgue medible E contenido en un rectángulo finito $(a,b) \times (c,d)$ y definamos $F = (a,b) \times (c,d) - E$.

La idea es cubrir F con un boreliano A tal que $m(A - F) = 0$, después de lo cual nos acercamos a E por dentro mediante $(a,b) \times (c,d) - A$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $R_1, R_2, \ldots$ una cubierta de F tal que:

$$\sum_j a(R_j) < m(F) + \varepsilon$$

$A^{(\varepsilon)} = \bigcup_j R_j$ es entonces un boreliano tal que:

$$m(A^{(\varepsilon)} - F) = m(A^{(\varepsilon)}) - m(F) \leq \sum_j a(R_j) - m(F) < \varepsilon$$

Es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe un boreliano $A^{(\varepsilon)}$ tal que $A^{(\varepsilon)} \supset F$ y $m(A^{(\varepsilon)} - F) < \varepsilon$.

Sea entonces $\left(A^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de borelianos que contengan a F y tales que:

$$m(A^{(n)} - F) < \tfrac{1}{n}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Se tiene entonces $m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{(j)} - F\right) \leq m(A^{(n)} - F) < \frac{1}{n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{(j)} - F\right) = 0$$

Por lo tanto, $A = (a, b) \times (c, d) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{(j)}$ es un boreliano tal que $A \supset F$ y $m(A - F) = 0$.

Definamos $B = (a, b) \times (c, d)$. Entonces B es boreliano.

Así que:

$$E = (E \cap A^c) \cup (E \cap A) = B \cup (A - F)$$

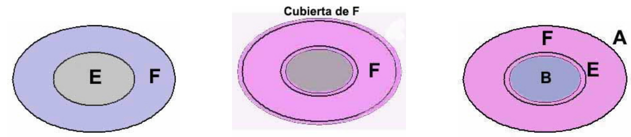
$$B \cap (A - F) = \emptyset$$

Definiendo $C = A - F$, se tiene $E = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ y $m(C) = 0$.

Tomemos ahora un conjunto Lebesgue medible E arbitrario y, para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $E_k = E \cap [(-k, k) \times (-k, k)]$.

Sea B_k un boreliano y C_k un conjunto de medida exterior cero tales que $E_k = B_k \cup C_k$ y $B_k \cap C_k = \emptyset$, entonces tomando $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ y $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, se tiene que B es boreliano, D tiene medida exterior cero y $E = B \cup D$.

Finalmente, definamos $C = D - B$, entonces C tiene medida exterior cero y se tiene $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.



■

Como corolario, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1. *La σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles es la σ-álgebra generada por los borelianos y los conjuntos de medida exterior cero.*

Los resultados anteriores pueden condensarse en el siguiente:

Teorema 2. *Existe una función m definida sobre la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ generada por los borelianos y los conjuntos de medida exterior cero, la cual tiene las siguientes propiedades:*

a) $m(\emptyset) = 0$

b) $m(R) = a(R)$ *para cualquier rectángulo* R.

c) Si $E_1, E_2, \ldots$ *es una colección infinita numerable de conjuntos medibles, ajenos por parejas, entonces:*

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

Denotaremos por $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ a la σ-álgebra formada por los conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^2$.